De spectrale representatie van multivariate zwak-stationaire stochastische processen met discrete tijdparameter

van den Tillaart, M.

Publication date:
1976

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

KATHOLIEKE HOGESCHOOL TILBURG

REEKS "TER DISCUSSIE"

[redacted]

FACUL [redacted] PPEN

KATHOLIEKE HOGESCHOOL TILBURG

REEKS "TER DISCUSSIE"

No. 76.041 november 1976

De spectrale representatie van multivariate zwak-stationaire stochastische processen met discrete tijdparameter.

Mike van den Tillaart.

FACULTEIT DER ECONOMISCHE WETENSCHAPPEN

Samenvatting.

Laat $\{X(t)\}$ een tijdsafhankelijk proces zijn met tijdparameter t. Voor een reëel getal λ heet $e^{i\lambda t}$ een harmonische trilling met frequentie λ. Als $\{X(t)\}$ te schrijven is als een lineaire combinatie (som of integraal) van harmonische trillingen met in de tijd constante coëfficiënten, dan spreken we van een spectrale representatie van $\{X(t)\}$.

Ingeval $\underline{X}(t)$ een kolomvector van stochastische variabelen is, en $E\{\underline{X}(t).\underline{X}^*(s)\}$ slechts afhangt van het verschil t-s, heet $\{\underline{X}(t)\}$ een zwak-stationair proces. De spectrale representatie van een zwak-stationair proces heeft de vorm van een integraal met betrekking tot een stochastische maat: een stochastische integraal. Deze stochastische integraal heeft eigenschappen analoog aan die van gewone integralen. Dit rapport behandelt het geval dat de tijdparameter t discreet is.

Inhoud.

Voorwoord.

Het existentie-bewijs voor de spectrale representatie van zwak-stationaire stochastische processen in dit rapport is een uitwerking van de appendices A2.1 en A5.1 bij hoofdstuk 2 respectievelijk 5 van Koopmans [1]. Dit rapport kwam in zijn huidige vorm tot stand in samenwerking met Prof. Dr. B.B. van der Genugten.

§ 1. Inleiding.

De spectrale representatie van een tijdreeks.

Onder een tijdreeks $\{X(t): t = \ldots,-1,0,1,\ldots\}$ verstaan we een reeks van in het algemeen complexe kolomvectoren $X(t)$, waarbij de parameter t de discrete tijd aanduidt en de gehele getallen doorloopt. Overeenkomstig het soort vectoren waaruit de tijdreeks bestaat, onderscheiden we reële en complexe, univariate en multivariate, deterministische en stochastische tijdreeksen.

Voor ieder reëel getal λ doorloopt $e^{i\lambda t}$ als functie van de reële variabele t, de tijd, de eenheidscirkel in het complexe vlak met een hoeksnelheid van λ radialen per tijdseenheid. We noemen $e^{i\lambda t}$ een harmonische trilling met (hoek) frequentie λ. Wanneer t de gehele getallen doorloopt is er geen onderscheid tussen de harmonische trillingen met frequenties λ en $\lambda + 2\pi$. Aangezien we slechts tijdreeksen met discrete tijdparamter beschouwen, beperken wij ons tot harmonische trillingen met frequenties uit het interval $(-\pi,\pi]$.

Wanneer een tijdreeks $\{X(t)\}$ te schrijven is als een lineaire combinatie (som of integraal) van harmonische trillingen met in de tijd constante coëfficiënten, dan heet die schrijfwijze een spectrale representatie van de tijdreeks. De existentie van een spectrale representatie voor een bepaalde klasse van tijdreeksen, de zwak-stationaire, vormt het onderwerp van dit rapport. Ter introductie beschouwen we eerst een periodieke deterministische tijdreeks.

Periodieke deterministische tijdreeks.

We beschouwen de tijdreeks $\{X(t): t = \ldots,-1,0,1,\ldots\}$ van complexe kolomvectoren. De tijdreeks is periodiek met periode n:

$$X(t) = X(t+n), \qquad t \in G.$$

Laat:

$$T_n := \{-[\tfrac{n-1}{2}], -[\tfrac{n-1}{2}] + 1, \ldots, [\tfrac{n}{2}]\},$$

$$\Lambda_n := \{\lambda_j : \lambda_j = \frac{2\pi j}{n},\ \ j \in T_n\}.$$

Met de definitie:

$$(1.1) \qquad \Delta Z(\lambda) := \frac{1}{n} \sum_{t \in T_n} e^{-i\lambda t}.X(t), \qquad \lambda \in \Lambda_n,$$

volgt de spectrale representatie voor $\{X(t)\}$:

$$(1.2) \qquad X(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} e^{i\lambda t}.\Delta Z(\lambda), \qquad t \in G.$$

Voor de functie Z op $[-\pi,\pi]$ die gedefinieerd wordt door:

$$(1.3) \qquad Z(\lambda) := \sum_{\substack{\mu \in \Lambda_n \\ \mu \leq \lambda}} \Delta Z(\mu), \qquad \lambda \in [-\pi,\pi],$$

(waarbij een lege som als nul geïnterpreteerd wordt),

geldt dat Z continu is van rechts op $[-\pi,\pi)$ met $Z(-\pi) = 0$. Voor $\lambda \in \Lambda_n$ is $\Delta Z(\lambda)$ te beschouwen als de aangroeiing van Z in het punt λ, voor $\lambda \notin \Lambda_n$ is de aangroeiing nul.

Periodieke zwak-stationaire stochastische tijdreeks.

We beschouwen de tijdreeks $\{\underline{X}(t): t = \ldots,-1,0,1,\ldots\}$ van complexe stochastische kolomvectoren. De tijdreeks $\{\underline{X}(t)\}$ is periodiek met periode n:

$$\underline{X}(t) = \underline{X}(t+n), \ t \in G.$$

De tijdreeks $\{\underline{X}(t)\}$ heet zwak-stationair indien $E\{|\underline{X}(t)|^2\} < \infty$ voor alle t en indien:

$$(1.4) \qquad E\{\underline{X}(s+t).\underline{X}^*(s)\} = \Gamma(t), \qquad s,\ t \in G.$$

We nemen aan dat $\{\underline{X}(t)\}$ zwak-stationair is; de matrixfunctie Γ gedefinieerd door (1.4) heet de matrix van covariantie-functies van $\{\underline{X}(t)\}$. We definiëren $\Delta\underline{Z}(\lambda)$ en $\underline{Z}(\lambda)$ conform (1.1) en (1.3). Nu geldt de spectrale representatie (1.2) voor $\{\underline{X}(t)\}$. Met $\{\underline{X}(t)\}$ is ook $\{\Gamma(t)\}$ periodiek met periode n. We kunnen dus op analoge wijze een spectrale representatie voor $\{\Gamma(t)\}$ construeren:

$$(1.5) \qquad \Delta F(\lambda) := \frac{1}{n} \sum_{t \in T_n} e^{-i\lambda t}.\Gamma(t), \quad \lambda \in \Lambda_n,$$

$$(1.6) \qquad \Gamma(t) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} e^{i\lambda t}.\Delta F(\lambda), \quad t \in G.$$

Op het interval $[-\pi,\pi]$ definiëren we $F(\lambda)$ met behulp van $\Delta F(\lambda)$ conform (1.3). Het verband tussen $\Delta F(\lambda)$ en $\Delta\underline{Z}(\lambda)$ wordt gegeven door:

$$(1.7) \qquad E\{\Delta\underline{Z}(\lambda).\Delta\underline{Z}^*(\mu)\} = \begin{cases} 0 \text{ als } \lambda \neq \mu \\ \Delta F(\lambda) \text{ als } \lambda = \mu \end{cases}, \quad \lambda,\mu \in \Lambda_n.$$

Blijkbaar zijn de aangroeiingen van $\underline{Z}$ orthogonaal en is $\Delta F(\lambda) \geq 0$, $\lambda \in \Lambda_n$.

Reële periodieke zwak-stationaire stochastische tijdreeks.

We beschouwen de consequenties voor het voorgaande van de veronderstelling dat $\{\underline{X}(t)\}$ reëel is. We definiëren $\Delta\underline{Z}$, Γ en ΔF als hierboven. Laat:

$$\Lambda_n^+ := \Lambda_n \cap [0,\pi].$$

We definiëren:

$$(1.8) \qquad \Delta\underline{U}(\lambda) := \begin{cases} \Delta\underline{Z}(\lambda) \text{ als } \lambda = 0,\pi \\ 2\text{Re } \Delta\underline{Z}(\lambda) \text{ als } \lambda \in (0,\pi) \end{cases}, \quad \lambda \in \Lambda_n^+,$$

$$(1.9) \qquad \Delta\underline{V}(\lambda) := \begin{cases} 0 \quad \text{als } \lambda = 0,\pi \\ -2 \text{ Im } \Delta\underline{Z}(\lambda) \text{ als } \lambda \in (0,\pi) \end{cases}, \quad \lambda \in \Lambda_n^+.$$

Hierdoor worden $\Delta\underline{U}(\lambda)$ en $\Delta\underline{V}(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_n^+$, reële stochastische vectoren. De spectrale representatie (1.2) krijgt nu de zogeheten reële vorm:

$$(1.10) \qquad \underline{X}(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda_n^+} (\cos \lambda t.\Delta\underline{U}(\lambda) + \sin \lambda t.\Delta\underline{V}(\lambda)), \qquad t \in G.$$

Met de definities:

$$(1.11) \qquad \Delta B(\lambda) := \begin{cases} \Delta F(\lambda) \text{ als } \lambda = 0,\pi \\ 2\mathrm{Re}\ \Delta F(\lambda) \text{ als } \lambda \in (0,\pi) \end{cases}, \ \lambda \in \Lambda_n^+,$$

$$(1.12) \qquad \Delta D(\lambda) := \begin{cases} 0 \text{ als } \lambda = 0,\pi \\ -2\mathrm{Im}\ \Delta F(\lambda) \text{ als } \lambda \in (0,\pi) \end{cases}, \ \lambda \in \Lambda_n^+$$

worden de matrices $\Delta B(\lambda)$ en $\Delta D(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda_n^+$, reëel en symmetrisch respectievelijk scheef-symmetrisch en hun diagonaal-elementen niet-negatief respectievelijk nul. De reële vorm van de spectrale representatie (1.6) wordt nu:

$$(1.13) \qquad \Gamma(t) = \sum_{\lambda\in\Lambda_n^+} (\cos \lambda t.\Delta B(\lambda) + \sin \lambda t.\Delta D(\lambda)), \qquad t \in G.$$

Uit (1.7) valt voor $\lambda,\mu \in \Lambda_n^+$ af te leiden:

$$(1.14) \quad \begin{cases} E\{\Delta\underline{U}(\lambda).\Delta\underline{U}^*(\mu)\} = \begin{cases} 0 \text{ als } \lambda \neq \mu \\ \Delta B(\lambda) \text{ als } \lambda = \mu. \end{cases} \\ E\{\Delta\underline{V}(\lambda).\Delta\underline{V}^*(\mu)\} = \begin{cases} 0 \text{ als } \lambda \neq \mu \text{ of } \lambda = \mu \in \{0,\pi\} \\ \Delta B(\lambda) \text{ als } \lambda = \mu \in (0,\pi) \end{cases} \\ E\{\Delta\underline{U}(\lambda).\Delta\underline{V}^*(\mu)\} = \begin{cases} 0 \text{ als } \lambda \neq \mu \text{ of } \lambda = \mu \in \{0,\pi\} \\ \Delta D(\lambda) \text{ als } \lambda = \mu \in (0,\pi). \end{cases} \end{cases}$$

Zwak-stationaire stochastische tijdreeks.

Het laten vallen van de periodiciteit kan heuristisch beschouwd worden als het nemen van de limiet voor $n \to \infty$ in het voorgaande. Voor $n \to \infty$ vormen de punten van Λ_n een steeds fijnere verdeling van het interval $(-\pi,\pi]$ en ligt het voor de hand om voor (1.2) en (1.6) te schrijven:

$$\underline{X}(t) = \int e^{i\lambda t}.d\underline{Z}(\lambda), \qquad t \in G,$$

$$\Gamma(t) = \int e^{i\lambda t}.dF(\lambda), \qquad t \in G.$$

Hierin wordt de integraal genomen over het interval $(-\pi,\pi]$; als het integratie-gebied niet vermeld wordt bedoelen we steeds de integraal over dit interval. De omkeer-formules voor bovenstaande spectrale representaties zijn te vinden met behulp van $\Delta\lambda = 2\pi/n$; voor $n \to \infty$ vinden we uit (1.1) en (1.5):

$$d\underline{Z}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t\in G} \underline{X}(t).e^{-i\lambda t}.d\lambda,$$

$$dF(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t\in G} \Gamma(t).e^{-i\lambda t}.d\lambda.$$

Geïntegreerd zijn deze twee formules exact te interpreteren; zie bijvoorbeeld Hannan [2], Theorem 3, pagina 41.

In § 6 blijkt de spectrale representatie voor $\{\underline{X}(t)\}$ en $\{\Gamma(t)\}$ bovenstaande vorm te hebben, waarbij het verband (1.7) tussen $\underline{Z}$ en F blijft bestaan. Dit verband vormt zelfs de basis voor de definitie van een stochastische integraal in § 5 en vormt de samenhang tussen de Hilbertruimten $L_2(Z)$ en $L_2(F)$, die besproken worden in § 3 respectievelijk § 4; hun gemeenschappelijke structuur is het onderwerp van § 2.

§ 2. Producten van Hilbertruimten.

Laat S een lineaire ruimte zijn over de complexe getallen. We beschouwen het Cartesisch product S^p van p maal de ruimte S (p = 1,2,...). Elementen van S^p noteren we als kolomvectoren; dus $X \in S^p$ indien:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ met } x_1,\ldots,x_p \in S.$$

In S^p definiëren we de optelling en de scalaire vermenigvuldiging componentsgewijs; hiermee is S^p een lineaire ruimte over de complexe getallen. Voor elementen A van de klasse $\mathcal{M}$ van complexe pxp-matrices definiëren we A.X als het gebruikelijke matrixproduct indien $X \in S^p$; dus $A.X \in S^p$. We noemen S^p het p-product van de lineaire ruimte S.

Laat S nu een complexe inproductruimte zijn. Het inproduct van x en y uit S noteren we als (x,y).
De norm van x definiëren we op de gebruikelijke wijze:

$$\|x\| := \sqrt{(x,x)}, \quad x \in S.$$

Laat S^p het p-product zijn van S. Het analogon in S^p van het inproduct in S is de Grammiaan.
De Grammiaan van X en Y uit S^p is het element [X,Y] uit $\mathcal{M}$ gedefinieerd door:

$$[X,Y] := \{(x_j,y_k)\}$$

Voor $X,Y,Z \in S^p$ en $A \in \mathcal{M}$ geldt:

1e) $[X,X] \geq 0$, en $[X,X] = 0$ d.e.s.d. als $X = 0$,

2e) $[X,Y] = [Y,X]^*$,

3e) $[A.X,Y] = A.[X,Y]$,

4^e) $[X+Y,Z] = [X,Z] + [Y,Z]$,

5^e) $\mathrm{tr}([X,Y].[Y,X]) \leq \mathrm{tr}[X,X].\mathrm{tr}[Y,Y]$.

Uit de eerste vier eigenschappen volgt dat door:

$$(X,Y) := \mathrm{tr}\,[X,Y], \quad X,Y \in S^p$$

een inproduct in S^p is gedefinieerd. Voor de gebruikelijke norm in S^p geldt nu:

$$\|X\| := \sqrt{\mathrm{tr}\,[X,X]} = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \|x_j\|^2}, \quad X \in S^p.$$

Met deze Grammiaan, dit inproduct en deze norm noemen we S^p het p-product van de inproductruimte S.

Laat S in het bijzonder een Hilbertruimte zijn en S^p het p-product van S met Grammiaan, inproduct en norm als boven; S^p heet weer het p-product van de Hilbertruimte S en is zelf een Hilbertruimte.

Een belangrijke eigenschap is de continuïteit van de Grammiaan in S^p; hiermee bedoelen we dat de elementen van $[X_n,Y_m]$ naar de overeenkomstige elementen van $[X,Y]$ convergeren als X_n naar X en Y_m naar Y convergeert in S^p; $n,m \to \infty$.
Dit volgt gemakkelijk door gebruik te maken van 5^e). Hiermee zijn ook het inproduct en de norm continu in S^p.

Als D en L deelverzamelingen zijn van twee p-producten van inproductruimten, waarvan we de Grammianen ter onderscheid voorzien van het suffix d respectievelijk l, dan noemen we de afbeelding $T:D \to L$ Grammiaan-behoudend indien:

$$[X,Y]_d = [T(X),T(Y)]_l, \quad X,Y \in D.$$

Behoud van Grammiaan impliceert ook behoud van inproduct en norm en dus continuïteit. Laat nu D en L dichte deelverzamelingen zijn van de p-producten S^p en R^p van de Hilbertruimten S en R. Als de lineaire afbeelding: $T:D \to L$

Grammiaan-behoudend, één-éénduidig en op is, dan heeft T een unieke Grammiaan-behoudende uitbreiding $U:S^p \to R^p$. Deze uitbreiding U is lineair, één-ééndui-dig en op; dus ook zijn inverse $U^{-}:R^p \to S^p$ is lineair, Grammiaan-behoudend, één-éénduidig en op. Als X_n in D naar X in S^p convergeert, dan geldt:

$$U(X) = \lim_{n\to\infty} T(X_n), \text{ convergentie in } R^p.$$

We noemen U de continuë uitbreiding van T.

§ 3. De Hilbertruimte $L_2(Z)$.

Laat P een waarschijnlijkheidsverdeling zijn op de meetbare ruimte $(\Omega,\mathcal{S})$. Laat S de verzameling van alle complexe stochastische variabelen $\underline{x}$ zijn met eindig tweede moment:

$$E\{|\underline{x}|^2\} := \int_\Omega |\underline{x}(w)|^2 . dP(w) < \infty, \qquad \underline{x} \in S.$$

Nu is S een lineaire ruimte. Als we met p-kans 0 verschillende stochastische variabelen identificeren, wordt door:

$$(\underline{x},\underline{y}) := E\{\underline{x}.\underline{y}^*\}, \qquad \underline{x},\underline{y} \in S,$$

een inproduct op S gedefinieerd. Voor de gebruikelijke norm in S geldt nu:

$$\|\underline{x}\|^2 := (\underline{x},\underline{x}^*) = E\{|\underline{x}|^2\}, \qquad \underline{x} \in S.$$

Blijkbaar is S een Hilbertruimte, want convergentie in S komt overeen met convergentie in kwadratisch gemiddelde van stochastische variabelen en deze convergentie is volledig; zie bijvoorbeeld Kingman en Taylor [3] : toepassing van Theorem 7.3 in Paragraaf 11.8. Het p-product van de Hilbertruimte S noteren we als $L_2(P)$; de Grammiaan van $\underline{X}$ en $\underline{Y}$ uit $L_2(P)$ is $E\{\underline{X}.\underline{Y}^*\}$.

Beschouw een p-variaat stochastisch proces $\{\underline{Z}(\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ op $(\Omega,\mathcal{S})$ met kansverdeling P. We noemen $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ een p-variaat stochastisch proces over P op Λ met eindige tweede momenten indien:

$$\underline{Z}(\lambda) \in L_2(P), \qquad \lambda \in \Lambda.$$

Het opspansel Z_0 van zo'n p-variaat stochastisch proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ over P op Λ met eindige tweede momenten is een lineaire deelruimte van $L_2(P)$ gedefinieerd door:

$$Z_0 := \{ \sum_{j=1}^{n} A_j.\underline{Z}(\lambda_j) : n \in N, A_j \in \mathcal{M} \text{ en } \lambda_j \in \Lambda\}.$$

De afsluiting $L_2(Z)$ van Z_0 is dus een Hilbertruimte.

§ 4. De Hilbertruimte $L_2(F)$.

Laat P een waarschijnlijkheidsverdeling zijn op de meetbare ruimte $(\Omega,\mathcal{S})$ en $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ een p-variaat stochastisch proces over P op $[-\pi,\pi]$ met eindige tweede momenten en $Z(-\pi) = 0$.
Het proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ heet een proces met orthogonale aangroeiingen indien:

$$E\{[\underline{Z}(\lambda_2)-\underline{Z}(\lambda_1)].[\underline{Z}(\lambda_4)-\underline{Z}(\lambda_3)]^*\} = 0, \quad -\pi \le \lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 < \lambda_4 \le \pi.$$

Voor zo'n proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ definiëren we:

$$F(\lambda) := E\{\underline{Z}(\lambda).\underline{Z}^*(\lambda)\}, \qquad \lambda \in [-\pi,\pi].$$

Voor deze matrixfunctie F geldt:

$$E\{(\underline{Z}(\lambda_2)-\underline{Z}(\lambda_1)).(\underline{Z}(\lambda_2)-\underline{Z}(\lambda_1))^*\} = F(\lambda_2) - F(\lambda_1), \quad -\pi \le \lambda_1 < \lambda_2 \le \pi;$$

daarom heet F een momentenfunctie van het proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$. Voorts is F begrensd en hermitisch op $[-\pi,\pi]$ met $F(-\pi) = 0$, terwijl $F(\lambda_2)-F(\lambda_1) \ge 0$ als $-\pi \le \lambda_1 < \lambda_2 \le \pi$.

Het proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ is continu van rechts op $[-\pi,\pi)$ met betrekking tot de norm in $L_2(P)$ d.e.s.d. als F (elementsgewijs) continu van rechts is op $[-\pi,\pi)$.
We nemen aan dat F continu van rechts is op $[-\pi,\pi)$ en interpreteren de elementen van F als de verdelingsfuncties van totaal-eindige complexe σ-additieve verzamelingsfuncties op de Borelverzamelingen van $(-\pi,\pi]$. Op grond van de eigenschappen van F zijn deze maten absoluut continu ten opzichte van de maat met verdelingsfunctie Φ gedefinieerd door:

$$\Phi(\lambda) := \operatorname{tr} F(\lambda), \qquad \lambda \in [-\pi,\pi].$$

De matrix van Radon-Nikodym afgeleiden van F met betrekking tot Φ noteren we als f.

We beschouwen nu de lineaire ruimte S van alle p-dimensionale rij-vectoren x van complexe Borel-functies op $(-\pi,\pi]$ waarvoor geldt:

$\int |x(\lambda)|^2 \, d\Phi(\lambda) < \infty.$

Nu is S een lineaire ruimte. Als we elementen van S die bijna overal m.b.t. Φ aan elkaar gelijk zijn identificeren, wordt door:

$$(x,y) := \int x(\lambda).f(\lambda).y^*(\lambda).d\Phi(\lambda), \qquad x,y \in S,$$

een inproduct in S gedefinieerd. Met de gebruikelijke norm in S is S een Hilbertruimte; zie hiervoor Hannan [2], pagina 500-502. Het p-product van de Hilbertruimte S noteren we als $L_2(F)$; de Grammiaan van X en Y uit $L_2(F)$ noteren we als:

$$\int X(\lambda).f(\lambda).Y^*(\lambda).d\Phi(\lambda) := \int X(\lambda).dF(\lambda).Y^*(\lambda).$$

De lineaire deelruimte T van $L_2(F)$ van trigonometrische polynomen wordt gedefinieerd als:

$$T := \{ \sum_{j=1}^{n} A_j.e^{i\lambda t_j} ; n \in N, \ t_j \in G, \ A_j \in \mathcal{M} \}$$

In Tigelaar [4], Lemma 1.3.9, wordt voor het geval p = 1 bewezen dat T dicht ligt in $L_2(F)$. Hieruit volgt voor $p \geq 2$ de dichtheid van T in $L_2(F)$ via de eigenschappen van de norm in S en $L_2(F)$.

De lineaire deelruimte S van $L_2(F)$ van simpele trapfuncties wordt gedefinieerd als:

$$S := \{ \sum_{j=1}^{n} A_j.I_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} : n \in N, \ A_j \in \mathcal{M}, \ -\pi = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n = \pi \}$$

De dichtheid van S in $L_2(F)$ volgt weer omdat deze eigenschap waar is in het geval p = 1. Voor p = 1 is bekend de dichtheid van de gewone trapfuncties, dat wil zeggen eindige lineaire combinaties van indicator-functies van Borelverzamelingen. De dichtheid van simpele trapfuncties volgt hieruit omdat de Borelverzamelingen bij een eindige maat willekeurig dicht (in maat) zijn te benaderen met eindig veel disjuncte intervallen van de vorm $(\lambda_1,\lambda_2]$, $\lambda_1 < \lambda_2$.

§ 5. Stochastische integralen.

Laat P een kansverdeling zijn op de meetbare ruimte $(\Omega,\mathcal{S})$ en $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ een p-variaat stochastisch proces over P op $[-\pi,\pi]$ met eindige tweede momenten, orthogonale aangroeiingen, $\underline{Z}(-\pi) = 0$ en continu van rechts op $[-\pi,\pi)$. F is de momentenfunctie van $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ met $F(-\pi) = 0$. We beschouwen de p-producten $L_2(Z)$ en $L_2(F)$ van Hilbertruimten en construeren een afbeelding $K:L_2(Z) \to L_2(F)$, die lineair, Grammiaan-behoudend, één-éénduidig en op is.

We definiëren K_1: $\{\underline{Z}(\lambda);\ \lambda \in (-\pi,\pi]\} \to \{E.I_{(-\pi,\lambda]};\lambda \in (-\pi,\pi]\}$ door:

$$K_1(\underline{Z}(\lambda)) := E.I_{(-\pi,\lambda]}, \qquad \lambda \in (-\pi,\pi].$$

Voor $-\pi < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \pi$ geldt:

$$E\{\underline{Z}(\lambda_1).\underline{Z}^*(\lambda_2)\} = F(\lambda_1) = \int (E.I_{(-\pi,\lambda_1]}(\lambda)).dF(\lambda).(E.I_{(-\pi,\lambda_2]}(\lambda))^*.$$

Blijkbaar is K_1 Grammiaan-behoudend, voorts is K_1 één-éénduidig en op. Met Z_0 noteren we het opspansel van $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ en met S_0 de verzameling van simpele trapfuncties in $L_2(F)$. De uitbreiding $K_2:Z_0 \to S_0$ van K_1 valt te definiëren door:

$$K_2\Big(\sum_{j=1}^{n} A_j.(\underline{Z}(\lambda_j)-\underline{Z}(\lambda_{j-1}))\Big) := \sum_{j=1}^{n} A_j.I_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]},\ n \in N, A_j \in \mathcal{M}, -\pi = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n = \pi.$$

Uit de eigenschappen van de Grammiaan volgt dat K_2 Grammiaan-behoudend is, voorts is K_2 lineair, één-éénduidig en op. Omdat Z_0 dicht ligt in $L_2(Z)$ en S_0 dicht ligt in $L_2(F)$ is de continuë uitbreiding $K:L_2(Z) \to L_2(F)$ van K_2 lineair, Grammiaan-behoudend, één-éénduidig en op.

Het ligt voor de hand om, net als voor gewone integralen, voor de integraal van simpele trapfuncties met betrekking tot $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ te definiëren:

$$\int\Big(\sum_{j=1}^{n} A_j.I_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}(\lambda)\Big).d\underline{Z}(\lambda) := \sum_{j=1}^{n} A_j.(\underline{Z}(\lambda_j)-\underline{Z}(\lambda_{j-1})), n \in N, A_j \in \mathcal{M}, -\pi=\lambda_0<\ldots<\lambda_n=\pi.$$

Deze integraal komt blijkbaar overeen met de inverse afbeelding van K_2; maar dan is deze definitie op een consistente manier uit te breiden tot willekeurige functies in $L_2(F)$, namelijk met behulp van de continuë uitbreiding K van K_2 (K heet de kanonieke afbeelding van $L_2(Z)$ op $L_2(F)$):

$$\int\psi(\lambda).d\underline{Z}(\lambda) := K^{-}(\psi), \quad \psi \in L_2(F),$$

waarin $K^{-}: L_2(F) \to L_2(Z)$ de inverse is van K. Ook deze inverse is lineair, Grammiaan-behoudend, één-éénduidig en op.
Deze zogeheten "stochastische integraal met betrekking tot een proces met orthogonale aangroeiïngen" heeft de volgende eigenschappen:

1^e) $E\{[\int\psi(\lambda).d\underline{Z}(\lambda)].[\int\chi(\lambda).d\underline{Z}(\lambda)]^{*}\} = \int\psi(\lambda).dF(\lambda).\chi^{*}(\lambda)$, $\psi,\chi \in L_2(F)$.

2^e) $\int[A.\psi(\lambda)+B.\chi(\lambda)].d\underline{Z}(\lambda) = A.\int\psi(\lambda).d\underline{Z}(\lambda) + B.\int\chi(\lambda).d\underline{Z}(\lambda)$, $\psi,\chi \in L_2(F)$ en $A,B \in \mathcal{M}$.

3^e) $\int\psi_n(\lambda).d\underline{Z}(\lambda) \to \int\psi(\lambda).d\underline{Z}(\lambda)$ in $L_2(P)$ als $\psi_n \to \psi$ in $L_2(F)$, $n \to \infty$.

Voor vaste $\psi \in L_2(F)$ definiëren we het stochastische proces $\{\underline{W}(\lambda)\}$ over P op $[-\pi,\pi]$ door $W(-\pi) := 0$ en:

$$\underline{W}(\lambda) := \int I_{(-\pi,\lambda]}(\mu).\psi(\mu).d\underline{Z}(\mu), \quad \lambda \in (-\pi,\pi].$$

Dit proces $\{\underline{W}(\lambda)\}$ is continu van rechts op $[-\pi,\pi)$ en heeft orthogonale aangroeiïngen en eindige tweede momenten.
Voor de matrix g van Radon-Nikodym-afgeleiden van de momentenfunctie G van $\{\underline{W}(\lambda)\}$ met $G(-\pi) = 0$, met betrekking tot $\Phi(\lambda) = \mathrm{tr}\, F(\lambda)$, geldt:

$$g(\lambda) = \psi(\lambda).f(\lambda).\psi^{*}(\lambda), \quad \lambda \in (-\pi,\pi].$$

Deze relatie tussen G en F wordt ook wel genoteerd als:

$$dG(\lambda) = \psi(\lambda).dF(\lambda).\psi^{*}(\lambda).$$

De p-producten van Hilbertruimten $L_2(W)$ en $L_2(G)$ definiëren we nu conform $L_2(Z)$ en $L_2(F)$. Nu volgt dat $\chi \in L_2(G)$ d.e.s.d. als $\chi.\psi \in L_2(F)$. Een simpele trapfunctie $\theta \in L_2(G)$ is te schrijven als:

$$\theta(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} A_j . I_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}(\lambda), \qquad \lambda \in (-\pi,\pi],$$

waarin $n \in N$, $A_j \in \mathcal{M}$ en $-\pi = \lambda_0 < \ldots < \lambda_n = \pi$. Nu volgt voor θ dat:

$$\int \theta(\lambda).d\underline{W}(\lambda) = \int \theta(\lambda).\psi(\lambda).d\underline{Z}(\lambda).$$

Omdat de simpele trapfuncties dicht liggen in $L_2(G)$, geldt deze gelijkheid voor willekeurige $\chi \in L_2(G)$ c.q. $\chi.\psi \in L_2(F)$.
Het verband tussen $\{\underline{W}(\lambda)\}$ en $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ wordt daarom wel verkort genoteerd als:

$$d\underline{W}(\lambda) = \psi(\lambda).d\underline{Z}(\lambda).$$

Bij het proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ kunnen we een stochastisch proces $\{\underline{X}(t)\}$ over P op G definiëren door:

$$\underline{X}(t) := \int e^{i\lambda t}.d\underline{Z}(\lambda) := \int (E.e^{i\lambda t}).d\underline{Z}(\lambda), \qquad t \in G.$$

Met de eerste eigenschap van stochastische integralen volgt:

$$E\{\underline{X}(s+t).\underline{X}^*(s)\} = \int (E.e^{i\lambda(s+t)}).dF(\lambda).(E.e^{i\lambda s})^* = \int (E.e^{i\lambda t}).dF(\lambda).E :=$$

$$:= \int e^{i\lambda t}.dF(\lambda) := \Gamma(t).$$

Blijkbaar is dit proces $\{\underline{X}(t)\}$ zwak-stationair. In § 6 zullen we laten zien dat omgekeerd bij ieder zwak-stationair proces $\{\underline{X}(t)\}$ een proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ bestaat, zodanig dat:

$$\underline{X}(t) = \int e^{i\lambda t}.d\underline{Z}(\lambda), \qquad t \in G.$$

§ 6. De spectrale representatie.

Laat P een kansverdeling zijn op de meetbare ruimte $(\Omega,\mathfrak{F})$ en $\{\underline{X}(t)\}$ een p-variaat stochastisch proces over P op G met eindige tweede momenten. We nemen het proces $\{\underline{X}(t)\}$ zwak-stationair en met matrix van covariantie-functies Γ. Met de stelling van Herglotz (Theorem 3.2 van Doob [5]) volgt voor $p = 1$ dat Γ een unieke spectrale representatie heeft in de vorm van een integraal met betrekking tot een Lebesque-Stieltjes maat op $(-\pi,\pi]$; dit wordt voor $p > 1$ gegeneraliseerd in Hannan [2], pagina 35-37. Aangetoond kan worden dat er precies één hermitische matrix F van totaal-eindige complexe σ-additieve verzamelings-functies op de Borel-verzamelingen van $(-\pi,\pi]$ bestaat zodanig dat:

$$\Gamma(t) = \int e^{i\lambda t}.dF(\lambda), \qquad t \in G.$$

De bijbehorende matrix F van verdelingsfuncties kiezen we (elementsgewijs) continu van rechts op $[-\pi,\pi)$ en met $F(-\pi) = 0$. Nu volgt dat F begrensd en hermitisch is op $[-\pi,\pi]$, met $F(\lambda_2) - F(\lambda_1) \geq 0$ als $-\pi \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \pi$. We definiëren nu het p-product $L_2(F)$ van een Hilbertruimte op de wijze van § 4.

Het opspansel X_0 van het proces $\{\underline{X}(t)\}$ ligt dicht in de afsluiting $L_2(X)$ van X_0 en de verzameling T_0 van trigonometrische polynomen ligt dicht in $L_2(F)$. We definiëren de afbeelding K_1: $\{\underline{X}(t); t \in G\} \to \{E.e^{i\lambda t}; t \in G\}$ door:

$$K_1(\underline{X}(t)) := E.e^{i\lambda t}, \qquad t \in G.$$

Er geldt nu:

$$E\{\underline{X}(t).\underline{X}^*(s)\} = \Gamma(t-s) = \int e^{i\lambda(t-s)}.dF(\lambda), \qquad s,t \in G.$$

Blijkbaar is K_1 Grammiaan-behoudend. Op dezelfde wijze als in de vorige paragraaf kunnen we K_1 via $K_2: X_0 \to T_0$ uitbreiden tot een lineaire $K: L_2(X) \to L_2(F)$ die Grammiaan-behoudend, één-éénduidig en op is, met inverse K^-.

Het stochastisch proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ over P op $[-\pi,\pi]$ definiëren we door $\underline{Z}(-\pi) := 0$ en:

$$\underline{Z}(\lambda) := K^-(E.I_{(-\pi,\lambda]}), \qquad \lambda \in (-\pi,\pi].$$

Het proces $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ is continu van rechts op $[-\pi,\pi)$ en heeft orthogonale aangroeiïngen en eindige tweede momenten; de momentenfunctie van $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ is F. Vanwege de één-éénduidigheid van K en de dichtheid van de simpele trapfuncties in $L_2(F)$, volgt voor de afsluiting $L_2(Z)$ van het opspansel van $\{\underline{Z}(\lambda)\}$ dat $L_2(Z) = L_2(X)$. Maar dan is K juist de kanonieke afbeelding van $L_2(Z)$ op $L_2(F)$ en de spectrale representatie voor $\{\underline{X}(t)\}$ volgt onmiddellijk:

$$\underline{X}(t) = \int e^{i\lambda t}.d\underline{Z}(\lambda), \qquad t \in G.$$

Literatuur.

[1] L.H. Koopmans, The Spectral Analysis of Time Series, Academic Press, 1974.

[2] E.J. Hannan, Multiple Time Series, Wiley, 1970.

[3] J.F.C. Kingman and S.J. Taylor, Introduction to Measure and Probability, University Press Cambridge, 1966.

[4] H.H. Tigelaar, Spectraalanalyse en Stochastische Lineaire Differentievergelijkingen, Reeks "Ter Discussie" no. 1, Economische Faculteit, Katholieke Hogeschool, Tilburg, 1976.

[5] J.L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, 1953.

Notaties en symbolen.

G : de verzameling der gehele getallen.

[a] : het grootste gehele getal dat niet groter is dan het reële getal a.

$|X|$: de wortel uit de som van de kwadraten der absolute waarden van de elementen van de vector X.

A^* : het complex geconjungeerde en getransponeerde van de matrix A.

$A \geq 0$: de vierkante matrix A is hermitisch en positief-semi-definiet.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Re } A & : \text{het reële gedeelte van } A\\ \text{Im } A & : \text{het imaginaire gedeelte van } A\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} A = \text{Re } A + i.\text{Im } A,\\ \text{Re } A \text{ en Im } A \text{ reëel.}\end{array}\right.$$

$\mathcal{M}$: de verzameling der complexe pxp-matrices.

$\{a_{jk}\}$: de matrix met a_{jk} op de $(j,k)^e$ plaats.

tr A : het spoor van de vierkante matrix A.

$E\{\underline{x}\}$: de verwachting van $\underline{x}$.

N : de verzameling der natuurlijke getallen.

$I_{(a,b]}$: de indicator-functie van het interval $(a,b]$.

E : de pxp-eenheidsmatrix.

In de Reeks ter Discussie zijn verschenen:

1.H.H. Tiggelaar	Spectraalanalyse en stochastische lineaire differentievergelijkingen.	juni '75
2.J.P.C.Kleijnen	De rol van simulatie in de algemene econometrie.	juni '75
3.J.J. Kriens	A stratification procedure for typical auditing problems.	juni '75
4.L.R.J. Westermann	On bounds for Eigenvalues	juni '75
5.W. van Hulst J.Th. van Lieshout	Investment/financial planning with endogenous lifetimes: a heuristic approach to mixed integer programming.	juli '75
6.M.H.C.Paardekooper	Distribution of errors among input and output variables.	augustus '75
7.J.P.C. Kleijnen	Design and analysis of simulation Practical statistical techniques.	augustus '75
8.J. Kriens	Accountantscontrole met behulp van steekproeven.	september '75
9.L.R.J. Westermann	A note on the regula falsi	september '75
10.B.C.J. van Velthoven	Analoge simulatie van ekonomische modellen.	november '75
11.J.P.C. Kleijnen	Het ekonomisch nut van nauwkeurige informatie: simulatie van ondernemingsbeslissingen en informatie.	november '75
12.F.J. Vandamme	Theory change, incompatibility and non-deductibility.	december '75
13.A. van Schaik	De arbeidswaardeleer onderbouwd?	januari '76
14.J.vanLieshout J.Ritzen J.Roemen	Input-ouputanalyse en gelaagde planning.	februari '76
15.J.P.C.Kleijnen	Robustness of multiple ranking procedures: a Monte Carlo experiment illustrating design and analysis techniques.	februari '76
16.J.P.C. Kleijnen	Computers and operations research: a survey.	februari '76
17.J.P.C. Kleijnen	Statistical problems in the simulation of computer systems.	april '76
18.F.J. Vandamme	Towards a more natural deontic logic.	mei '76
19.J.P.C. Kleijnen	Design and analysis of simulation: practical, statistical techniques.	juni '76
20.H.H. Tigelaar	Identifiability in models with lagged variables.	juli '76
21.J.P.C. Kleijnen	Quantile estimation in regenerative simulation: a case study.	augustus '76
22.W.Derks	Inleiding tot econometrische modellen van landen van de E.E.G.	augustus '76
23.B. Diederen Th. Reijs W. Derks	Econometrisch model van België.	september '76
24.J.P.C. Kleijnen	Principles of Economics for computers.	augustus '76
25.B. van Velthoven	Hybriede simulatie van ekonomische modellen.	augustus '76.

26.F. Cole	Forecasting by exponential smoothing, the Box and Jenkins procedure and spectral analysis. A simulation study.	september '76
27.R. Heuts	Some reformulations and extensions in the univariate Box-Jenkins time series analysis.	juli '76
28.W. Derks	Vier econometrische modellen.	
29.J. Frijns	Estimation methods for multivariate dynamic models.	oktober '76
30.P. Meulendijks	Keynesiaanse theorieën van handelsliberalisatie.	oktober '76
31.W. Derks	Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van Grafentheorie. Deel I: inleiding in de Grafentheorie.	september '76
32.W. Derks	Structuuranalyse van econometrische modellen met behulp van Grafentheorie. Deel II: Formule van Mason.	oktober '76
33. A. van Schaik	Een direct verband tussen economische veroudering en bezettingsgraadverliezen.	september '76
34. W. Derks	Structuuranalyse van Econometrische Modellen met behulp van Grafentheorie. Deel III. De graaf van dynamische modellen met één vertraging.	oktober '76
35. W. Derks	Structuuranalyse van Econometrische Modellen met behulp van Grafentheorie. Deel IV. Formule van Mason en dynamische modellen met één vertraging.	oktober '76
36. J. Roemen	De ontwikkeling van de omvangsverdeling in de levensmiddelenindustrie in de D.D.R.	oktober '76
37. W. Derks	Structuuranalyse van Econometrische modellen met behulp van grafentheorie. Deel V. De graaf van dynamische modellen met meerdere vertragingen.	oktober '76
38. A. van Schaik	Een direkt verband tussen economische veroudering en bezettingsgraadverliezen. Deel II: gevoeligheidsanalyse.	december '76
39. W. Derks	Structuuranalyse van Econometrische modellen met behulp van Grafentheorie. Deel VI. Model I van Klein, statisch.	december '76
40. J. Kleijnen	Information Economics: Inleiding en kritiek.	november '76